2. Vordiplom D-ERDW: Lösungen

1. Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ eine Funktion gegeben durch $f(x,y) = 1 - \cos x + \frac{y^2}{2}$.

a) Um die kritischen Punkte zu finden setzen wir

$$\nabla f = \begin{pmatrix} \sin x \\ y \end{pmatrix} = 0\,.$$

Damit finden wir $y = 0$ und $x = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Von diesen Punkten liegen die folgenden kritischen Punkte im gegebenen Gebiet:

$$(-2\pi, 0)\,,\ (-\pi, 0)\,,\ (0,0)\,,\ (\pi, 0)\,,\ (2\pi, 0)\,.$$

Weil das Gebiet offen ist, gibt es keine weitere kritische Punkte auf dem Rand. Die **Hessematrix** ist gleich

$$H_f = \begin{pmatrix} \cos x & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Fuer $x = 0, \pm 2\pi$ hat man

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

d.h. positiv definit und damit **lokale Minima**.
Fuer $x = \pm\pi$ hat man

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

d.h. indefinit und damit **Sattelpunkte**.

b) Im Punkt $P(\frac{\pi}{2}, 2)$ ist die **Richtungsableitung** in die Richtung des **negativen Gradienten** minimal. Diese Richtung ist dann

$$e = -\nabla f(\frac{\pi}{2}, 2) = -(\sin\frac{\pi}{2}, 2) = (-1, -2)\,.$$

Die minimale Aenderung ist damit

$$\nabla f(\frac{\pi}{2}, 2)\frac{e}{|e|} = -\nabla f(\frac{\pi}{2}, 2)\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = -\sqrt{5}\,.$$

2. **a)** Das Niveau zur Konstante C bekommt man durch

$$g(u,v) = 1 + 2u + v = C\,.$$

Aufloesen liefert $v = C - 1 - 2u$. Wir bekommen also Geraden in der (u,v)-Ebene mit Steigung -2 und Achsenabschnitt $C - 1$.

b)

$$dg(u,v) = (2,1)\,.$$

Bitte wenden!

c)

$$h(x) = g(f(x), x) = 1 + 2x^2 \ln x + x\,,$$

und damit findet man durch **direkte** Rechnung

$$h'(x) = 4x \ln x + 2x + 1\,.$$

Mit Hilfe der **Kettenregel** findet man

$$\begin{aligned} h'(x) &= dg(f(x), x) \begin{pmatrix} f'(x) \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= (2, 1) \begin{pmatrix} 2x \ln x + x \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= 4x \ln x + 2x + 1\,. \end{aligned}$$

d) Mit Hilfe der **Taylorapproximation** findet man sofort

$$\begin{aligned} h(1.1) &\approx h(1) + h'(1)0.1 \\ &= 2 + 3 \cdot 0.1 = 2.3\,. \end{aligned}$$

3. $\mathcal{F}$ is das Bild von $f(x, y) = \frac{x}{y}$.

a) $\mathcal{F}$ ist die **Niveauflaeche** von

$$\mathcal{F} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, g(x, y, z) = 0\}\,,$$

mit $g(x, y, z) = z - f(x, y)$. Der Gradient steht senkrecht auf der Niveauflaeche. Deshalb,

$$\nabla g(x, y, z) = (-\frac{1}{y}, \frac{x}{y^2}, 1)\,.$$

Ein **Normalenvektor** ist damit

$$n = \nabla g(8, 2, 4) = (-\frac{1}{2}, 2, 1)\,.$$

b) Mit $z = u$, $y = v$ findet man $x = zy$ und damit die **Parametrisierung**

$$\mathcal{F} = \{ \begin{pmatrix} uv \\ v \\ u \end{pmatrix} \,|\, u \in \mathbb{R}\,,\, v \in \mathbb{R}^* \}\,.$$

Die Tangentialvektoren sind dann $\begin{pmatrix} v \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} u \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Am Punkt $P(8, 2, 4)$ gilt $u = 4$, $v = 2$ und damit $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Fuer den **Normalenvektor** findet man dann

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}\,.$$

c) (i) Die **Parameterdarstellung** berrechnet sich zu

$$\begin{pmatrix} 8 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \lambda, \mu \in \mathbb{R}\,.$$

Siehe nächstes Blatt!

(ii) Die **Koordinatengleichung** ist dann

$$-x + 4y + 2z + C = 0$$

was $C = -8$ zur Folge hat. Schlussendlich findet man

$$-x + 4y + 2z = 8\,.$$

4. **a)** Wir zerlegen den Weg γ in die Teilstuecke $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3$. Fuer die entsprechenden Parametrisierungen findet man

$\gamma_1 : [0,1] \to \mathbb{R}^2$,

$$t \mapsto \begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \gamma_1'(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$\gamma_2 : [0, \frac{\pi}{2}] \to \mathbb{R}^2$,

$$t \mapsto \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} \quad , \quad \gamma_2'(t) = \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix}.$$

$\gamma_3 : [0,1] \to \mathbb{R}^2$,

$$t \mapsto \begin{pmatrix} 0 \\ 1-t \end{pmatrix} \quad , \quad \gamma_3'(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Damit findet man

$$\begin{aligned}
\int_\gamma F &= \int_0^1 (t,0)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} dt + \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos t - \sin t \cos t, \sin t)\begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix} dt + \int_0^1 (0, 1-t)\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} dt \\
&= \int_0^1 t dt + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t \cos t dt + \int_0^1 t - 1 dt \\
&= \frac{t^2}{2}|_0^1 + \frac{\sin^3 t}{3}|_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{t^2}{2}|_0^1 - t|_0^1 \\
&= \frac{1}{3}\,.
\end{aligned}$$

Alternativer Loesungsweg mit dem Satz von GREEN:
Mit dem Satz von Green bekommt man sofort

$$\int_\gamma F = \int_S rot\, F d\mu(x,y)\,,$$

wobei S die Flaeche ist, die vom Weg γ eingeschlossen ist. Die Rotation berechnet sich zu

$$rot\, F(x,y) = x\,.$$

Damit bekommt man

$$\int_S rot\, F d\mu(x,y) = \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} x dy dx = \int_0^1 x\sqrt{1-x^2} dx = -\frac{1}{3}(1-x^2)^{\frac{3}{2}}|_0^1 = \frac{1}{3}\,.$$

b) F ist damit **kein** Potentialfeld. Folgende Begruendungen sind moeglich:

- Die Arbeit entlang des Weges γ ist nicht null, was fuer ein Potentialfeld eine notwendige Bedingung waere.
- Das Feld ist wegen $rot\, F = x \neq 0$ nicht **wirbelfrei**.
- Man sieht leicht, dass **keine Potentialfunktion** existieren kann.

5. Wir betrachten das Vektorfeld $F(x,y) = \begin{pmatrix} f(x,y) \\ \frac{1}{y^2 x} + \frac{x}{y} + 1 \end{pmatrix}$. Um ein Potentialfeld zu bekommen muss gelten

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}(\frac{1}{y^2 x} + \frac{x}{y} + 1) = -\frac{1}{y^2 x^2} + \frac{1}{y}\,.$$

Bitte wenden!

Durch Integrieren findet man

$$f(x,y) = \frac{1}{yx^2} + \ln y + g(x)\,.$$

Zum Beispiel kann $g(x) = 0$ genommen werden.
Auf jedem **einfach zusammenhaengenden** gebiet von $\mathbb{R}^2$ ist F ein **Potentialfeld**. Als Beispiele waeren

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x > 0, y > 0\} \quad \text{oder} \quad \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x < 0, y > 0\}$$

moeglich. Fuer die **Potentialfunktion** findet man duch integrieren

$$F^* = -\frac{1}{xy} + x \ln y + y\,.$$

6. **a)** Mit dem **Satz von Gauss** berrechnet man

$$\begin{aligned}
\text{Fluss} &= \int_G div\, F\, d\mu(x,y,z) = \int_G 2xy\, d\mu(x,y,z) \\
&= \int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^3 2xy\, dzdydx \\
&= \int_0^1 \int_0^{1-x} 6xy\, dydx \\
&= \int_0^1 3x(1-x)^2\, dx \\
&= \int_0^1 3x^3 - 6x^2 + 3x\, dx = \frac{1}{4}\,.
\end{aligned}$$

b) Der Fluss geht nur in z-Richtung und ist damit durch die Seitenwaende gleich **0**.

c)

$$\int_{\partial G_1} F \cdot n = \int_0^1 \int_0^{1-x} F \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} dydx = \int_0^1 \int_0^{1-x} -2xy \underbrace{z}_{=0}\, dydx = 0$$

Fur den Fluss durch die Oberflaeche bekommt man also

$$\begin{aligned}
\int_{\partial G_1 \cup \partial G_2} F \cdot n = \int_{\partial G_2} F \cdot n &= \int_0^1 \int_0^{1-x} F \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} dydx \\
&= \int_0^1 \int_0^{1-x} 6xy\, dxdy = \underbrace{\ldots}_{\text{wie oben}} = \frac{1}{4}\,.
\end{aligned}$$